

Lösungen der Aufgaben zu Mathematische Methoden der Physik I

Blatt 5

Aufgabe 5.1

$\int x \sin(x^2) dx$ Es sei $y=x^2$, dann gilt $dy = \frac{dy}{dx} dx \Leftrightarrow dy = 2x dx \Leftrightarrow dx = \frac{dy}{2x}$ und daraus folgt:

$$\frac{1}{2} \int \sin y dy = -\frac{1}{2} \cos y + C = -\frac{1}{2} \cos x^2 + C$$

$\int \frac{3x^2+x-1}{\sqrt{2x^3+x^2-2x}} dx$ Mit $y=2x^3+x^2-2x$ und

$dy = \frac{dy}{dx} dx \Leftrightarrow dy = (6x^2+2x-x) dx \Leftrightarrow dx = \frac{dy}{6x^2+2x-2}$ folgt

$$\frac{1}{2} \int \frac{dy}{\sqrt{y}} = \sqrt{y} + C = \sqrt{2x^3+x^2-2x} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x} \ln(\sqrt{y})}$$

$\int \sin^4 x \cos x dx$ Es sei $\cos x dx = d(\sin x)$ und $y = \sin x$. Dann folgt:

$$\int y^4 dy = \frac{1}{5} y^5 + C = \frac{1}{5} \sin^5 x + C.$$

$\int \frac{\arctan^3 x}{x^2+1} dx$ Mit $y = \arctan x$ und $dy = \frac{dy}{dx} dx \Leftrightarrow dy = \frac{1}{x^2+1} dx \Leftrightarrow dx = dy(x^2+1)$ folgt:

$$\int y^3 dy = \frac{1}{4} y^4 + C = \frac{1}{4} \arctan^4 x + C.$$

$\int \frac{\tan^2 x + \sqrt{\tan x} - 1}{\cos^2 x} dx$ Es sei $y = \tan x$, dann gilt $dy = \frac{dy}{dx} dx \Leftrightarrow dy = \cos^2 x dx \Leftrightarrow dx = \frac{dy}{\cos^2 x}$ und es folgt:

$$\int y^2 + \sqrt{y} - 1 \, dy = \frac{1}{3} y^3 + \frac{3}{2} \sqrt[3]{y^2} - y + C = \frac{1}{\tan^3} x + \frac{3}{2} \sqrt[3]{\tan^2 x} - \tan x + C$$

Aufgabe 5.2

Aufgabe 5.3

Zu zeigen: $\int_c^{c+2\pi} \cos(nx) \sin(mx) \, dx = 0$.

1. Fall: $m \neq n$

Zuerst forme man den Ausdruck $\cos(nx) \sin(mx)$ um. Hierfür gilt:

$$\cos(nx) \sin(mx) = \frac{1}{2} (\sin(n+m)x - \sin(n-m)x).$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \int_c^{c+2\pi} (\sin(n+m)x - \sin(n-m)x) \, dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\cos(m-n)x}{(n-m)} + \frac{\cos(n+m)x}{(n+m)} \right]_c^{2\pi+c} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Für $m \neq n$ ist $\cos(m-n) \cdot (2\pi + c) = \cos(m-n) \cdot c$ aufgrund der Periodizität der Kosinusfunktion (analog für $\cos(m+n)x$) und damit der gesamte Ausdruck gleich Null. $(m+n)$, $n-m$ sind von Null verschiedene konstante Faktoren.

2. Fall: $m = n$

Hierfür gilt: $\delta_{mn} = \pi$.

$$\int_c^{c+2\pi} \cos nx \sin nx \, dx = 0$$

$$\begin{aligned} 0 &= \int_c^{c+2\pi} \cos nx \sin nx \, dx \\ &= \left[\frac{1}{2} \sin^2 x \right]_c^{2\pi+c} \\ &= \frac{1}{2} [\sin^2 x]_c^{2\pi+c} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Da $\sin^2(2\pi + c) = \sin^2(c)$ aufgrund Periodizität der Sinusfunktion gilt, ist der gesamte Ausdruck gleich Null.

Zu zeigen: $\int_c^{c+2\pi} \cos(nx) \cos(mx) \, dx = \pi \delta_{mn}$.

1. Fall: $m \neq n$

Hierfür gilt: $\delta_{mn} = 0$.

Zuerst forme man den Ausdruck $\cos(nx)\cos(mx)$ um. Hierfür gilt:

$$\cos(nx)\cos(mx) = \frac{1}{2}(\cos(n-m)x + \cos(n+m)x). \text{ Somit}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \int_c^{c+2\pi} (\cos(n-m)x + \cos(n+m)x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n-m)x}{n-m} + \frac{\sin(n+m)x}{n+m} \right]_c^{2\pi+c} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Für $m \neq n$ ist $\sin(n-m) \cdot (2\pi + c) = \sin(n-m) \cdot c$ aufgrund der Periodizität der Sinusfunktion (analog für $\sin(n+m)x$) und damit der gesamte Ausdruck gleich Null. Die Nenner sind stets ungleich Null, die Terme damit definiert.

2. Fall: $m = n$

Hierfür gilt: $\delta_{mn} = \pi$.

$$\int_c^{c+2\pi} \cos^2(nx) dx = \pi$$

$$\begin{aligned} \pi &= \int_c^{c+2\pi} (\cos^2(nx)) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_c^{c+2\pi} (1 + \cos(2 \cdot nx)) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2n} \cdot \sin(2nx) \right]_c^{2\pi+c} \\ &= \frac{1}{2} (2\pi + c + \frac{1}{2n} \cdot \sin(2n)(2\pi + c) - c - \frac{1}{2n} \sin(2n)c) \\ &= \pi \end{aligned}$$

Da $\sin(2n) \cdot (2\pi + c) = \sin(2n) \cdot c$ aufgrund der Periodizität der Sinusfunktion gilt bleibt nur $\frac{1}{2} 2\pi$.

Zu zeigen: $\int_c^{c+2\pi} \sin(nx)\sin(mx) dx = \pi \delta_{mn}$.

1. Fall: $m \neq n$

Hierfür gilt: $\delta_{mn} = 0$.

Zuerst forme man den Ausdruck $\sin(nx)\sin(mx)$ um. Hierfür gilt:

$$\sin(nx)\sin(mx) = \frac{1}{2}(\cos(n-m)x - \cos(n+m)x). \text{ Somit}$$

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{2} \int_c^{c+2\pi} (\cos(n-m)x - \cos(n+m)x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(n-m)x}{n-m} - \frac{\sin(n+m)x}{n+m} \right]_c^{2\pi+c} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Für $m \neq n$ ist $\sin(n-m) \cdot (2\pi + c) = \sin(n-m) \cdot c$ aufgrund der Periodizität der Sinusfunktion (analog für $\sin(m+n)x$) und damit der gesamte Ausdruck gleich Null. Die Nenner sind stets ungleich Null, die Terme damit definiert.

2. Fall: $m = n$

Hierfür gilt: $\delta_{mn} = \pi$.

$$\int_c^{c+2\pi} \sin^2(nx) dx = \pi$$

$$\begin{aligned}\pi &= \int_c^{c+2\pi} (\sin^2(nx)) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_c^{c+2\pi} (1 - \cos(2 \cdot nx)) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{2n} \cdot \sin(2nx) \right]_c^{2\pi+c} \\ &= \frac{1}{2} \left(2\pi + c - \frac{1}{2n} \cdot \sin(2n)(2\pi + c) - c + \frac{1}{2n} \sin(2n)c \right) \\ &= \pi\end{aligned}$$

Da $\sin(2n) \cdot (2\pi + c) = \sin(2n) \cdot c$ aufgrund der Periodizität der Sinusfunktion gilt bleibt nur $\frac{1}{2} 2\pi$.