Stefan Jonas (Matrikelnummer: 746572)
Michael Knorr (Matrikelnummer: 743747)
Paul Schröter (Matrikelnummer: 743162)
Julia Saupe (Matrikelnummer: 745161)

Abgabe: 20.11.2008

Lösungen der Aufgaben zu Analysis I

Blatt 4

Aufgabe 1a

Zu bestimmen ist der Grenzwert der Folge $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$, $n\in\mathbb{N}$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{1}\right)$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n}\right)}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)$$
$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)=0$$

Zu zeigen bleibt, dass der Grenzwert tatsächlich gleich Null ist. Aus der Definition des Grenzwertes folgt:

$$\forall \epsilon>0\,\exists N=N(\epsilon): d\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},0\right)<\epsilon\ \forall n\geq N.$$

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}},0\right) &= \left|\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}-0\right| \\ &= \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} &< \epsilon \end{aligned}$$

Wir schätzen $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ ab mit $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\leq\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}$. Es gilt $\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\frac{1}{2\cdot\sqrt{n}}$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{n}} &< \epsilon \\ \Leftrightarrow \sqrt{n} &> \frac{1}{2\epsilon} \\ \Leftrightarrow n &> \left(\frac{1}{2\epsilon}\right)^2 \end{aligned}$$

Also kann man N setzen mit $N=\left[\left(\frac{1}{2\epsilon}\right)^2\right]+1$.

Sei $n \geq \left[\left(\frac{1}{2\epsilon}\right)^2\right]+1$, dann gilt $\sqrt{n} > \frac{1}{2\epsilon}$, also $\frac{1}{2\sqrt{n}} < \epsilon$, $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \frac{1}{2\sqrt{n}} < \epsilon$.

Folglich $\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} < \epsilon \; \forall n \geq N$. Q.e.d.

Aufgabe 1b

Aufgabe 2a

Man zeige: $\lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.

Zuerst berechnen wir die ersten 6 Folgeglieder.

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{2^0}{0!} &&= 1 \\ a_1 &= \frac{2^1}{1!} &&= 2 \\ a_2 &= \frac{2^2}{2!} &&= 2 \\ a_3 &= \frac{2^3}{3!} &&= \frac{4}{3} \\ a_4 &= \frac{2^4}{4!} &&= \frac{2}{3} \\ a_5 &= \frac{2^5}{5!} &&= \frac{4}{15} \end{aligned}$$

Wobei gilt $\frac{4}{15} < \frac{2}{3} < \frac{4}{3} < 2$.

Nun versuchen wir, a_n für jedes $n = 1, 2, \ldots$ abschätzen, nämlich

$$\begin{aligned} \frac{2^n}{n!} &= \frac{2\cdot 2\cdot\ldots\cdot 2}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 1} \\ &= \frac{2}{n}\frac{2}{n-1}\frac{2}{n-2}\cdots\frac{2}{2}\frac{2}{1} \\ &\leq \frac{2}{n}\cdot 1\cdot 1\cdot\ldots\cdot 1\cdot 2 \\ &= \frac{4}{n} \end{aligned}.$$

Nun lässt sich leicht beweisen, dass die Folge gegen Null konvergiert. Denn es sei $\epsilon > 0$. Wählen wir nach dem Archimedischem Axiom eine Nummer $N = N(\epsilon)$ derart, dass $\frac{4}{n} < \epsilon \; \forall n \geq N$. Man kann N wählen mit $N = \left[\frac{4}{\epsilon}\right] + 1$.

Ist nun $n \geq N$, so erhalten wir $d\left(\frac{2^n}{n!}, 0\right) = \left|\frac{2^n}{n!} - 0\right| = \frac{2^n}{n!}$ und somit $\frac{2^n}{n!} \leq \frac{4}{n} < \epsilon$. Q.e.d.

Aufgabe 2b

Aufgabe 3

Aufgabe 4

Aufgabe 5

Aufgabe 6

Man zeige für die Folge der Fibonacci-Zahlen $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Eigenschaft der Reihe: $\forall\, n\geq 1 : x_{n+1}=x_n+x_{n-1}$.

Für $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ existiere der Grenzwert a , also $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=a$. Mit der obigen Eigenschaft: $\lim_{n\to\infty}\frac{x_n+x_{n-1}}{x_n}=a$.

$$
\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty}\frac{x_n+x_{n-1}}{x_n} &&= a\\
\Leftrightarrow\ & \lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_n}+\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n-1}}{x_n} &&= a\\
\Leftrightarrow\ & 1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\frac{x_n}{x_{n+1}}} &&= a\\
\Leftrightarrow\ & 1+\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{x_{n+1}}} &&= a\\
\Leftrightarrow\ & 1+\frac{1}{a} &&= a\\
\Leftrightarrow\ & a+1 &&= a^2\\
\Leftrightarrow\ & a^2-a-1 &&= 0
\end{aligned}
$$

Aus der Lösungsformel einer quadratischen Gleichung folgt $a_{1,2}=\frac{1}{2}\pm\sqrt{\frac{1}{4}+1}$, also $a_1=1+\frac{\sqrt{5}}{2}$ und $a_2=1-\frac{\sqrt{5}}{2}$. Der Grenzwert existiert.

Da für alle $n\geq 0$ gilt $\frac{x_{n+1}}{x_n}>1$ wegen $x_{n+1}>x_n$ folgt: Die Folge ist nach unten beschränkt.

Der Grenzwert ist a_1 : $\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=1+\frac{\sqrt{5}}{2}$. Der zweite Wert a_2 entfällt, da $a_2<0$ und $\frac{x_{n+1}}{x_n}>1$ für alle n .

Aufgabe 7a

Es sei a der Grenzwert der Folge x_n : $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Zu zeigen ist, dass wie folgt gilt: $\lim_{n\to\infty} X_n = a$.
Aus der Definition des Grenzwertes: $\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} : |X_n - a| < \epsilon$.

$$\begin{aligned}
& \left|X_n - a\right| && < \epsilon \\
\Leftrightarrow\ & \left|\frac{x_1 + \ldots + x_n}{n} - a\right| && < \epsilon \\
\Leftrightarrow\ & \left|\frac{x_1 + \ldots + x_n - an}{n}\right| && < \epsilon \\
\Leftrightarrow\ & \left|\frac{x_1 - a + \ldots + x_n - a}{n}\right| && < \epsilon \\
\Leftrightarrow\ & \left|\frac{x_1 - a}{n} \frac{x_2 - a}{n} + \ldots + \frac{x_n - a}{n}\right| && < \epsilon
\end{aligned}$$

Nun kann die Dreiecksungleichung – $|x + y| \le |x| + |y|$ – zur Abschätzung genutzt werden:

$$\left|\frac{x_1 - a}{n} \frac{x_2 - a}{n} + \ldots + \frac{x_n - a}{n}\right| \le \left|\frac{x_1 - a}{n}\right| + \ldots + \left|\frac{x_n - a}{n}\right|$$

Weiterhin ist $\left|\frac{x_1 - a}{n}\right| + \ldots + \left|\frac{x_n - a}{n}\right| = \frac{1}{n}\left(\left|x_1 - a\right| + \ldots + \left|x_n - a\right|\right)$ beschränkt.

Sei $\frac{1}{n}\left(\left|x_1 - a\right| + \ldots + \left|x_n - a\right|\right) \subset c$. Damit folgt $\left|\frac{x_1 - a}{n} \frac{x_2 - a}{n} + \ldots + \frac{x_n - a}{n}\right| \le \frac{1}{n} c + \delta$.

Mit dieser Abschätzung gilt: $\frac{1}{n} c + \delta < \epsilon \Leftrightarrow \frac{1}{\epsilon - \delta} c < n$. Wähle N mit $N = \left[\frac{1}{\epsilon - \delta} c\right] + 1$.

$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall \delta > 0 : \exists N : |x_n - a| < \delta$ für alle $n \ge N$.

$$\underbrace{|x_1 - a| + \ldots + |x_n - a|}_{c} + \underbrace{|x_{N+1} - a|}_{\delta} + \ldots + \underbrace{|x_n - a|}_{\delta} \le c + n \cdot \delta$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n}\left(|x_1 - a| + \ldots + |x_n - a|\right) \subseteq c + n \cdot \delta = \frac{1}{n} c + \delta$$

Damit ist gezeigt, dass wenn die Folge x_n konvergiert, auch die Folge X_n konvergiert und sie den selben Grenzwert besitzen.

Aufgabe 7b

Zu finden ist ein Beispiel für den Fall, dass X_n konvergiert, x_n jedoch nicht.

$$X_n = \frac{1}{n}\left(x_1 + x_2 + \ldots + x_n\right)$$

Für die Folge x_n wählen wir frei $x_n = (-1)^n$. In diesem Fall konvergiert x_n nicht.

$$X_n = \frac{1}{n}\left((-1)+(-1)^2+\ldots+(-1)^n\right)$$
$$= \begin{cases} \frac{1}{n}(-1), \text{ falls n gerade} \\ \frac{1}{n}, \text{ falls n ungerade} \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} X_n = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{n} \\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}$$
$$= 0$$

Die Folge X_n konvergiert gegen Null, während x_n divergiert.

Aufgabe 8

Es ist zu zeigen, dass die gegebene Folge wohl definiert ist und gegen $\sqrt{a}$ konvergiert.

Zu zeigen: $\forall\, n \geq 0 : x_n > 0$.

Annahme: $\exists\, n : x_n = 0$. Es sei $m = n - 1$.

$$\begin{aligned} 0 &= x_{m+1} \\ &= \frac{1}{2}\left(x_m + \frac{a}{x_m}\right) \\ 0 &= \frac{1}{2}\left(x_m^2 + a\right) \\ \Leftrightarrow \quad 0 &= \frac{1}{2}\left(x_m^2 + a\right) \\ \Leftrightarrow \quad -a &= x_m^2 \end{aligned}$$

Hierbei gilt, dass $-a < 0$, da $a > 0$. Somit kann $x_m = \pm\sqrt{-a}$ keine Lösung sein. Somit kann x_n nicht Null sein.

Zu zeigen bleibt der Grenzwert der Folge.

$$\lim_{n\to\infty} x_{n+1} = g$$
$$\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right) = g$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{\lim_{n\to\infty} x_n}{2} + \frac{a}{2\lim_{n\to\infty} x_n} = g$$

Falls der Grenzwert ungleich Null folgt:

$$\frac{g}{2}+\frac{a}{2g}=g$$
$$\Leftrightarrow \quad g^2+a=2g^2$$
$$\Leftrightarrow \quad a=g^2$$
$$\Leftrightarrow \quad g_1=\sqrt{a}\,;\, g_2=-\sqrt{a}$$

$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$, $x_0>0$ und $x_n>0$ für alle $n\geq 0$, denn $x_0>0$ und $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$, wobei $-\sqrt{a}$ kein Grenzwert ist.